

Generalized Brans-Dicke theories

東京理科大学大学院
理学研究科物理学専攻 M1 辻川研究室
加瀬 竜太郎

1 Introduction

1998年, SNIaの観測から, 宇宙は加速膨張しているということが分かった. そして, その加速膨張を引き起こす原因はダークエネルギーと名付けられる. このダークエネルギーの第一候補としては, まず宇宙項 Λ が考えられる. 実際, この Λ CDMモデルは多くの観測結果との整合性を持つ. しかし, このモデルは大きな問題も孕んでいる. 素粒子物理学において宇宙項のエネルギー密度に相当するものは真空のエネルギー密度であるが, 素粒子物理学の予言するこのエネルギー密度は, 実際に観測されているダークエネルギーのエネルギー密度に比べ 10^{121} 倍大きくなってしまいうのである. そこで, 加速膨張の原因が宇宙項の他にありとした場合($\Lambda = 0$)に考えられる解決策には, 大きく分けて modified matter と modified gravity の二通りがある. 今回は後者の一つであるスカラーテンソル理論, その中でも有名な Brans-Dicke 理論 (BD 理論) について一般化を行い, 加速膨張が説明できるかを検討していく.

2 Brans-Dicke theories

BD理論(1961)は, 次のようなラグランジアンを出発点としている.

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_M \right) \quad (1)$$

一項目は非最小結合と呼ばれ, 今考えているマスのないスカラー場と計量場との結合を, 二項目はマスのないスカラー場の非正準な運動項を, 三項目は物質場のラグランジアンを表している. ラグランジアンの時点ではスカラー場と物質場とは結合していないが, ここから運動方程式を導くと, 計量場を介してスカラー場と物質場の結合が起こる. ω はBDパラメータと呼ばれていて, この時のスカラー場と物質場との結合の強さを表す指標であり, $\omega \rightarrow \infty$ の極限で一般相対論 (GR) に帰着する. 太陽系での局所重力実験により, ω には次のような制限が課せられている.

$$\omega > 40000 \quad (2)$$

この条件下では GR からのずれは非常に小さく, 見分けがつかなくなってしまうため, 加速膨張のモデルには適さない.

そもそも (2) のような大きな制限が課せられたのは、スカラー場がマスレスだったことに起因する。マスレスなスカラー場は第五の力、すなわちスカラー場と非相対論的物質との相互作用、を伝達させやすく、実際には観測されていない第五の力の伝播を抑えるために、(2) のような制限が必要になったのである。そこで、加速膨張を説明するモデルを作るためには、スカラー場と物質場の結合が上のように切れてしまうことなしに、しかし同時に局所的には GR を取り戻せるような機構が必要となる。この候補として、次の2つの機構が存在する。一つ目はカメレオン機構と呼ばれる。これは、場のポテンシャル項を導入することで、高密度領域において局所的に大きな質量を得る機構である。この局所的な質量により、スカラー場との結合が切れることなしに、第五の力の伝播を抑えることが可能になる。二つ目は Vainshtein 機構と呼ばれる。これは DGP モデルにおいて導入された機構で、非線形な自己相互作用項 $\square\phi(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi)$ の効果により Vainshtein 半径内では GR を取り戻すことが可能になる。また、この自己相互作用項は運動方程式を導いた際、式を二次のオーダーに保つことができる。一般に、3階以上の微分が運動方程式に入ると、初期条件が増えることによってゴーストが出現しやすくなってしまうために、式を二次のオーダーに保つというこの性質は重要なものである。今回はこの二つ目の機構に着目し、まず次のようなラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \square\phi(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_M \right] \quad (3)$$

しかし、これだけでは加速膨張を実現するようなモデルを構築することはできなかった。そこで、F.P.Silva と K.Koyama は次のような拡張を行った。

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi(\phi) \square\phi(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_M \right] \quad (4)$$

そうして、 $\xi(\phi) \propto \phi^{-2}$ である時に、ドジッター解 (dS 解) を持ち加速膨張を実現しうることを示した。[1]

3 Generalized Brans-Dicke theories

ここでは (4) を更に一般化し、次のようなラグランジアンを考える。[2]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\phi) R + B(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi(\phi) \square\phi(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_M \right] \quad (5)$$

$F(\phi), B(\phi), \xi(\phi)$ はスカラー場 ϕ の関数であり、その関数型は dS 解を持つという要求から制限することになる。

平坦な FLRW 時空において、非相対論的物質 (エネルギー密度 ρ_m) と輻射 (エネルギー密度 ρ_r , 圧力 $P_r = \rho_r/3$) から成る完全流体を考える。そうして (5) から成る作用を、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ について変分をとることで、次の補正されたフリードマン方程式を得ることができる。

$$3FH^2 = B\dot{\phi}^2/2 - 3HF_{,\phi}\dot{\phi} + (6H\xi - \xi_{,\phi}\dot{\phi})\dot{\phi}^3 + \rho_m + \rho_r \quad (6)$$

ここで、 $H \equiv \dot{a}/a$ はハッブルパラメータ、 a はスケール因子である。上式を変形すると、次のようになる。

$$1 = \frac{B\phi^2}{6F}x^2 - \frac{\phi F_{,\phi}}{F}x + \frac{2\xi\phi^3}{F}H^2x^3\left(1 - \frac{\phi\xi_{,\phi}}{6\xi}x\right) + \frac{\rho_m}{3FH^2} + \frac{\rho_r}{3FH^2} \quad (7)$$

ただし、

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{H\phi} \quad (8)$$

である。

今、加速膨張を実現するよう、dS解を持つ条件を考えていく。dS時空においてハッブルパラメータ H は定数となる。またF.P.SilvaとK.Koyamaにより、 x が定数の時にdS解を持つことが示されている。この条件のもと、(7)における $F(\phi)$ 、 $B(\phi)$ 、 $\xi(\phi)$ の関数型を制限する。ただし、dS時空においては物質も輻射も存在しないため、(7)の最後の二項は落ち、

$$1 = \frac{B\phi^2}{6F}x^2 - \frac{\phi F_{,\phi}}{F}x + \frac{2\xi\phi^3}{F}H^2x^3\left(1 - \frac{\phi\xi_{,\phi}}{6\xi}x\right) \quad (9)$$

これを解くことでdS点における値 x_{dS} を得るわけだが、 x_{dS} が時間に依らない形になるためには、(9)において x の冪についての係数が定数とならなければならない。そこで、 $F(\phi)$ 、 $B(\phi)$ 、 $\xi(\phi)$ が冪関数であることを仮定すると、次のようにおくことで要求を満たすことができる。

$$F(\phi) = M_{pl}^2(\phi/M_{pl})^{3-n}, \quad B(\phi) = \omega(\phi/M_{pl})^{1-n}, \quad \xi(\phi) = (\lambda/\mu^3)(\phi/M_{pl})^{-n} \quad (10)$$

ここで、 M_{pl} はreduceされたプランク質量($M_{pl} \simeq 10^{18} GeV$)、 ω, λ は1のオーダーの正の無次元量、 μ は後にdS点を現在付近に調整するために用いる質量の次元を持つ定数である。今考えているモデルは、 $n=2$ の時にF.P.SilvaとK.Koyamaのモデルを含んでいる。

(10)を(7)に代入して整理すると、次のようになる。

$$1 = \frac{\omega}{6}x^2 - (3-n)x + 2xy\left(1 + \frac{n}{6}x\right) + \frac{\rho_m}{3FH^2} + \frac{\rho_r}{3FH^2} \quad (11)$$

ここで、

$$y \equiv \lambda x^2 \frac{H^2}{H_{dS}^2} \quad (12)$$

である。さらに、次のような密度パラメータを定義する。

$$\Omega_{DE} = \frac{\omega}{6}x^2 - (3-n)x + 2xy\left(1 + \frac{n}{6}x\right), \quad \Omega_r = \frac{\rho_m}{3FH^2}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_r}{3FH^2} \quad (13)$$

すると、上式は次のような密度パラメータの条件式となる。

$$1 = \Omega_{DE} + \Omega_r + \Omega_m \quad (14)$$

次に、dS点における x と H の値をそれぞれ x_{dS} 、 H_{dS} とし、(10)を(9)に代入して λ について解くと、次のようになる。

$$\lambda = \frac{\mu^3}{M_{pl}H_{dS}^2} \frac{[(n-3)x_{dS} - 2][(n-3)x_{dS} - 3]}{2x_{dS}^3(x_{dS} + 3)} \quad (15)$$

ここで、観測からダークエネルギーの密度パラメータは、 $\Omega_{DE} \simeq 0.72$ 、およそ1のオーダーであることが分かっている。よって、(13)より x_{dS} はおよそ1のオーダーとなる。以上より、(15)の左辺と右辺のオーダーを合わせるためには、 μ を次のように固定すれば良い。

$$\mu^3 = (M_{pl} H_{dS}^2)^{1/3} \simeq 10^{-40} M_{pl} \quad (16)$$

以上より、宇宙の発展を記述するための微分方程式を求めると、次のようになる。

$$x' = -x \left[\frac{d_1}{d_2} + \frac{9}{2\omega d_1} (3 - n - 2y) (\Omega_m + \frac{4}{3} \Omega_r) - \frac{6(3-n)}{\omega d_1} + x + \frac{H'}{H} \right] \quad (17)$$

$$y' = -2y \left[\frac{d_1}{d_2} + \frac{9}{2\omega d_1} (3 - n - 2y) (\Omega_m + \frac{4}{3} \Omega_r) - \frac{6(3-n)}{\omega d_1} + x \right] \quad (18)$$

$$\Omega_r' = -2\Omega_r \left(2 + \frac{3-n}{2} x + \frac{H'}{H} \right) \quad (19)$$

ただし、プライムは e-folding number $N = \ln a$ での微分を表す。ここから解析解を導くと、次のような三点を得ることができる。

$$P_r : (x, y, \Omega_r) \simeq \left(0, \frac{(3-n)\Omega_m}{8}, 1 \right) \quad (20)$$

これは、 $\Omega_m \ll 1$ の時に求まる、輻射優勢期に相当する点である。今、 y の元々の定義(12)より、

$$n \leq 3 \quad (21)$$

との制限がつく。

$$P_m : (x, y, \Omega_r) = \left(0, \frac{3-n}{6}, 0 \right) \quad (22)$$

これは物質優勢期に相当する固定点である。この点もまた、鞍点となっており、後に次の固定点が続くことになる。

$$P_{dS} : (x, y, \Omega_r) = (x_{dS}, \lambda x_{dS}^2, 0) \quad (23)$$

これは加速膨張期に相当する固定点である。また、今回は計算が終わっていないが、先行研究より dS 点が安定であるためには音速の自乗 $c_s^2 > 0$ が必要となり、この条件と(21)より、

$$2 \leq n \leq 3 \quad (24)$$

という条件が n につく。以上より数値計算を行った結果、次の図のようになった。

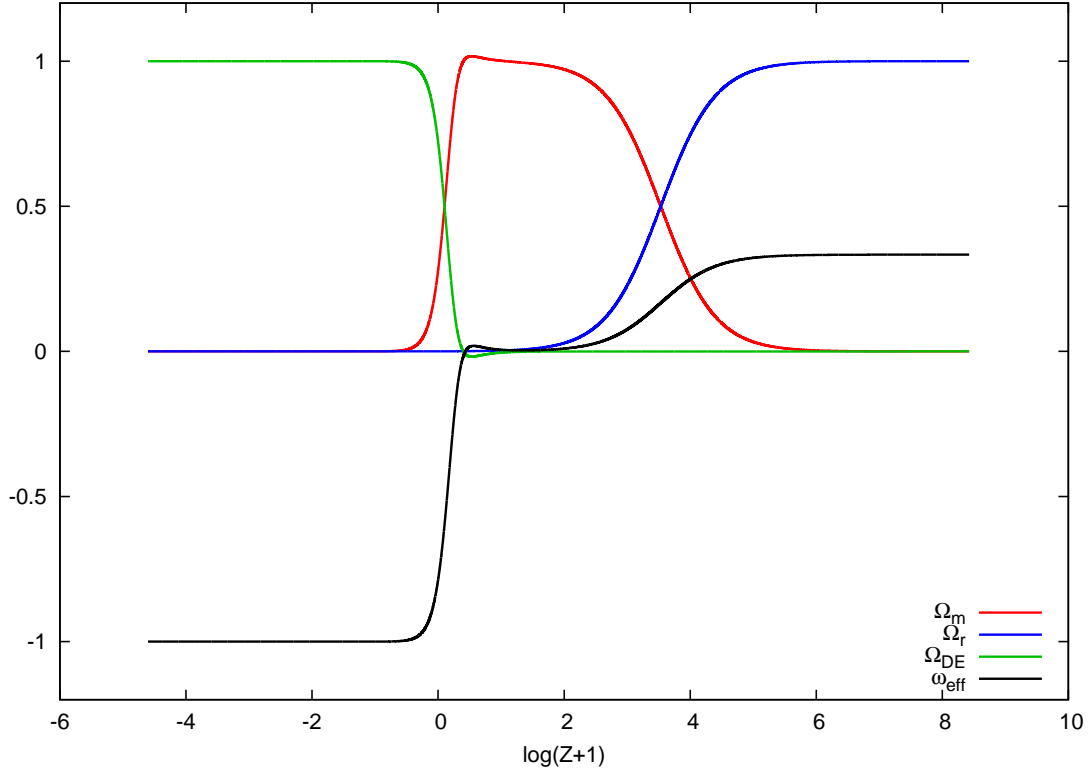


図. Ω_r , Ω_m , Ω_{DE} 及び実効状態方程式 w_{eff} の発展

横軸は赤方偏移パラメータ $Z = 1/a - 1$ の常用対数を用いた。モデルパラメータは $n = 2.5$ を使い、初期値は現在 ($Z = 0$) における観測結果、 $\Omega_{DE} \simeq 0.72$, $\Omega_m \simeq 0.28$, $\Omega_r \simeq 8.0 \times 10^{-5}$, を得るように入力した。

実効状態方程式 w_{eff} の発展を見ると、宇宙初期には $w_{eff} = 1/3$ となり輻射優勢期、その後 $w_{eff} = 0$ となり物質優勢期、現在付近で $w_{eff} < -1/3$ となり加速膨張期に対応していることが分かった。

4 conclusion

高密度領域において GR を取り戻すために、スカラー場の非線形な自己相互作用項を BD 理論のラグランジアンに入れ、さらに (5) のように一般化を行う。そのようなラグランジアンから、加速膨張を実現し、バックグラウンドの部分では理論的に矛盾のないダークエネルギーモデルを作ることができた。

今後の課題としては、宇宙論的摂動論を用いてゴースト問題や安定性、その他の問題を解析していきたい。また、図を見ると分かるように、今回の結果は Λ CDM モデルに酷似している。そこで、物質の密度揺らぎを考え、重力定数の形を見ることにより、今回のモデルと Λ CDM モデルとの相違点も明確にしていきたい。

5 reference

- [1] F. P. Silva and K. Koyama, Phys. Rev. D 80, 121301 (2009)
- [2] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa JCAP07(2010)024