# 宇宙のダークエネルギーと bi Gravity 重力理論

早稲田大学　前田研究室

M2

鈴木　大地

# outline

１、ダークエネルギー問題

２、（先行研究）EBI重力理論

-bi metric

-問題点

３、bi Gravity重力理論

-two de Sitter solutions

-cosmological perturbations

# 標準宇宙モデル

GR

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

anzats (宇宙原理＜一様等方＞)

$$d^2 s = a^2(-d^2\tau + \gamma_{ij} dx^i dx^j)$$

観測の示唆

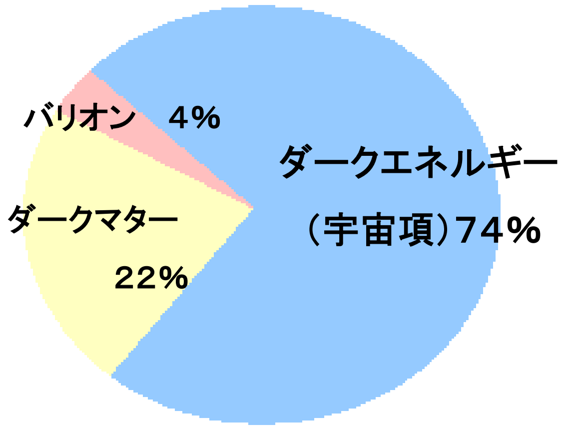
・見えない物質(dark matter)の存在

・宇宙は加速膨張している(Ｉa型超新星…)→宇宙項Λ(斥力源)が必要

・WMAPによる宇宙論パラメータの決定(ΛCDM model)

$$\frac{3}{a^2}(\mathcal{H}^2 + K) = 8\pi G(\rho_b + \rho_{dm}) + \Lambda$$

$$\frac{1}{a^2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + K) = -8\pi G(P_b + P_{dm}) - \Lambda$$




問題点

・宇宙定数と物質密度のパラメタが同程度

→偶然性問題

・真空のエネルギー(宇宙定数と等価)の理論値と観測による制限の極端な食い違い

→宇宙項問題

→ ダークエネルギーの存在の示唆

# approach for Dark energy

・'dark energy'の問題を解決するための3つのアプローチ

modify

$$\boxed{G_{\mu\nu}} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} + T^{DE}_{\mu\nu}\right)$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \qquad ds^2 = -dt^2 + X^2(r,t)dr^2 + A^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

1．物質場に斥力源になりうる自由度を追加する

〔例〕quintessence field

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$$

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\phi)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$$

2．重力場を（観測に反しない程度に）変更する

〔例〕DGP model

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2k_5^2}\sqrt{-g}R + \frac{1}{2k_4^2}\sqrt{-^{(4)}g}^{(4)}R$$

$$H^2 - \frac{H}{r_c} = \frac{8\pi G_4}{3}\rho$$

$$r_c = \frac{k_5^2}{2k_4^2}$$

3.GRの枠組み内で等方非一様な計量を考える。

〔例〕LTB model

$$A(r,t) \to a(t)r$$

$$\frac{2}{3}\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{3}\frac{\ddot{A}'}{A} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m$$

$$A' \equiv \partial A/\partial x \quad \dot{A} \equiv \partial A/\partial t$$

でFRW metricを再現

→本研究では2の修正重力のアプローチ

# 先行研究　Eddington-Born-Infeld 重力理論

EBI gravity

$$I(g_{\mu\nu},\boxed{\mathcal{C}^{a}_{\mu\nu}})=\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\left\{\sqrt{-g}R+\boxed{\frac{2}{\alpha l^2}\sqrt{|g-l^2K|}}\right\}+S_m[g]$$

$$(K_{\mu\nu}=\partial_\alpha\mathcal{C}^{\alpha}_{\mu\nu}-\partial_\nu\mathcal{C}^{\alpha}_{\mu\alpha}+\mathcal{C}^{\alpha}_{\alpha\beta}\mathcal{C}^{\beta}_{\mu\nu}-\mathcal{C}^{\alpha}_{\beta\mu}\mathcal{C}^{\beta}_{\alpha\nu})$$

・変分は$g_{\mu\nu}$と $C^{\alpha}_{\mu\nu}$で独立にとる。

・palatini形式の要領で、新たな計量(bi-metric) $q_{\mu\nu}$が定義される。

$$\sqrt{q}q^{\mu\nu}\equiv-\frac{1}{\alpha}\sqrt{|g-l^2K|}\left(\frac{1}{g-l^2K}\right)^{\mu\nu}$$

・これにより2つのアインシュタイン方程式を導く、bi-gravity theoryが定式化できる。

$$G^{\mu}{}_{\nu}=8\pi GT^{\mu}{}_{\nu}-\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{q}{g}}(q^{-1})^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}$$

$$Q^{\mu}{}_{\nu}=-\lambda\delta^{\mu}_{\nu}+\frac{1}{l^2}\left\{(q^{-1})^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}-\frac{1}{2}(q^{-1})^{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}\delta^{\mu}_{\nu}\right\}$$

$$\lambda\equiv\frac{\alpha}{l^2}$$ 2nd cosmological constant

# Cosmology in EBI gravity

・metrical ansatz

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -a^2 d^2\tau + a^2\gamma_{ij}dx^i dx^j$$
$$q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -a^2 X^2 d^2\tau + Y^2\gamma_{ij}dx^i dx^j$$

アインシュタイン方程式を書き下すと、全部で4つの方程式が出てくる。

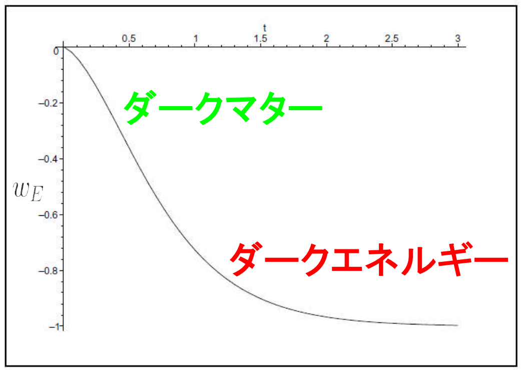
$$\mathcal{H} = \frac{dloga}{d\tau} \qquad Z = \frac{dlogY}{d\tau}$$

$$\frac{3}{a^2}(\mathcal{H}^2 + K) = 8\pi G\rho + \boxed{\frac{1}{l^2}\frac{Y^3}{a^3 X}} \qquad \frac{3K}{Y^2} + \frac{3Z^2}{a^2X^2} = \lambda - \frac{1}{l^2}\left(\frac{1}{2X^2} - \frac{3a^2}{2Y^2}\right)$$

$$\frac{1}{a^2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + K) = -8\pi GP + \boxed{\frac{1}{l^2}\frac{XY}{a}} \qquad \frac{K}{Y^2} + \frac{3Z^2}{a^2X^2} - \frac{2\mathcal{H}Z}{a^2X^2} - \frac{2X'Z}{a^2X^3} - \frac{2Z'}{a^2X^2} = \lambda + \frac{1}{2l^2X^2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{Y^2l^2}$$

$$\rho_E \equiv \frac{Y^3}{8\pi G l^2 X a^3} \quad \text{‘物質密度’} \quad P_E \equiv -\frac{XY}{8\pi G l^2 a^2} \quad \text{‘圧力’} \quad P_E = w_E\rho_E \quad \text{‘状態方程式’}$$

$$w_E \equiv -\frac{a^2X^2}{Y^2}$$




パラメタを観測と合うようにfittingすると、$w_E$は
宇宙初期にはcold dark matterのように,後期には、
dark energyのように振舞う

$$\alpha \sim 1$$

*Máximo Bañados* arXiv:0801.4103

# 問題点

de Sitter時空の摂動に対してポテンシャルが発散

→de Sitter時空が安定に存在できない

$$g_{00} = -a^2(1+2\Phi) \qquad g_{ij} = a^2(r_{ij}+2\Psi)$$

$$\Psi = \frac{2A}{1+\sqrt{24\alpha-39}}(\tau_0-\tau)^{\frac{-1+\sqrt{24\alpha-39}}{2}} + \frac{2B}{1-\sqrt{24\alpha-39}}(\tau_0-\tau)^{\frac{-1-\sqrt{24\alpha-39}}{2}} + C(\tau_0-\tau)^{\frac{3+\sqrt{24\alpha-15}}{2}} + D(\tau_0-\tau)^{\frac{3-\sqrt{24\alpha-15}}{2}}$$

$$\Phi = \frac{(1-\sqrt{24\alpha-39})A}{1+\sqrt{24\alpha-39}}(\tau_0-\tau)^{\frac{-1+\sqrt{24\alpha-39}}{2}} + \frac{(1+\sqrt{24\alpha-39})B}{1-\sqrt{24\alpha-39}}(\tau_0-\tau)^{\frac{-1-\sqrt{24\alpha-39}}{2}} + C(\tau_0-\tau)^{\frac{3+\sqrt{24\alpha-15}}{2}} + D(\tau_0-\tau)^{\frac{3-\sqrt{24\alpha-15}}{2}}$$

A,B,C,D は積分定数

αがいかなる値をとっても第二項が $\tau \to \tau_0$で発散

→不安定性を回避することはできない…

→EBI重力理論を拡張したBi gravity重力理論において

de Sitter時空の摂動不安定性を回避できるか？

# Bi gravity重力理論

・もともとは強い相互作用を説明するための文脈で生まれた理論（QCD以前）
・前述のEBI重力理論を一般化した理論（より一般的に考えるために宇宙項も含める）

Bi gravity 重力理論

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R(g)-2\Lambda)+\sqrt{-q}(R(q)-2\lambda)+\frac{1}{l^2}(\sqrt{-q}[-q^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}+\boxed{K((q^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta})^2-(q^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma})^2)]}$$

$\Lambda=\dfrac{\alpha_0}{l^2}; cosmological\ constant$

$\lambda=\dfrac{\alpha}{l^2}: 2nd\ cosmological\ constant$

EBI 重力理論 $\quad K=0,\alpha_0=0$

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R(g)-2\Lambda)+\sqrt{-q}(R(q)-2\lambda)+\frac{1}{l^2}(\sqrt{-q}[-q^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta})]$$

GR $\quad l\longrightarrow\infty$

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R(g)-2\Lambda)$$

de Sitter 時空が不安定

ダークエネルギー問題

→ $\alpha_0$（宇宙定数）、$\alpha$（2nd 宇宙定数）、 Kの値を適切に取ることで、
de Sitterの摂動不安定を回避できるか？

# Two de Sitter solutions

・bi Gravity重力理論においては、2つのde Sitter解が存在

$$w_{(BI)} = \frac{P_{(BI)}}{\rho_{(BI)}} = \frac{\left\{\frac{Y^3}{a^3 X} - 6K\frac{Y}{aX}\right\}}{\left\{\frac{XY}{a} - 2K\left(\frac{Y}{aX} + 2\frac{Xa}{Y}\right)\right\}} = -1$$

cf;EBI

$$\boxed{w_E \equiv -\frac{a^2 X^2}{Y^2}}$$

1. Proportional vacuum（EBI重力理論と同じ解）

$$\boxed{\frac{a^2 X^2}{Y^2} = 1}$$

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{1-\alpha\alpha_0+6\alpha K}}\frac{l}{\tau_0-\tau}$$

$$X(\tau) = \sqrt{\frac{1+6K-\alpha_0}{1-\alpha}}$$

$$Y(\tau) = \sqrt{\frac{3(1+6K-\alpha_0)}{1-\alpha\alpha_0+6\alpha K}}\frac{l}{\tau_0-\tau}$$

2. Non proportional vacuum( bi Gravity固有の解）

$$\boxed{\frac{Y^2}{a^2} = 4K}$$

$$a = \frac{\sqrt{3(\alpha_0 - 4K^{3/2}X)}l}{\tau_0-\tau}$$

$$Y = 2K^{1/2}\frac{\sqrt{3(\alpha_0 - 4K^{3/2}X)}l}{\tau_0-\tau}$$

$$\left(\alpha + \frac{3}{16K}\right)X^3 + \left(\frac{1}{4} - \alpha_0\right)X + 4K^{3/2} = 0$$

→今回は1の場合に関してポテンシャルが摂動に対して安定になるようなものが存在するかを計算した。

# result

・計算の結果、1の場合のポテンシャルは

パラメータをいかなる値にとっても発散の回避ができないことがわかった。

$$(\tau_0-\tau)^2(\Psi-\Phi)''\underline{-2(\tau_0-\tau)(\Psi-\Phi)'}$$
$$+\left\{\underline{\left(\frac{6(1+2K-\alpha_0+4K\alpha)(2+6K-\alpha_0-\alpha)}{(1-\alpha\alpha_0+6K\alpha)(1+6K-\alpha_0)}\right)-2+k^2(\tau_0-\tau)^2}\right\}(\Psi-\Phi)=0$$

複雑になったのはこの項だけ…

cf;EBI

$$(\tau_0-\tau)^2(\Psi-\Phi)''-2(\Psi-\Phi)'+(-6\alpha+10+k^2(\tau_0-\tau)^2)(\Psi-\Phi)=0$$

微分方程式の第二項に変化なし→不安定性の回避に失敗

$$\Psi-\Phi=A_0(\tau_0-\tau)^{\frac{-1+\sqrt{1-4\beta}}{2}}+B_0(\tau_0-\tau)^{\frac{-1-\sqrt{1-4\beta}}{2}}$$

$$\frac{6(1+2K-\alpha_0+4K\alpha)(2+6K-\alpha_0-\alpha)}{(1-\alpha\alpha_0+6K\alpha)(1+6K-\alpha_0)}-2\equiv\beta$$

# Summary and future work

・ダークエネルギーを説明しうる修正重力理論の１つである、bi Gravity理論の線形摂動を考察した。

・bi Gravityにおいては、可能なde Sitter解が２つ考えられる。

・EBI重力理論で起こるde Sitter時空での不安定性をbi Gravity理論に拡張することによって回避できるかを考えた。

→proportional vacuum（de Sitter１）では回避できないことがわかった。

・non proportional vacuum（de Sitter2）では回避可能か？

・不安定性の原因は何か？

→massive gravityであるので、ghostの可能性が考えられる。

・回避可能であればどのような条件の下で安定なde Sitterになるか

標準宇宙モデルとの比較を通して考えたい。

Finished…..

thank you!!