コンパクト天体と磁場を伴うディスクの一般相対論的平衡状態

東大総合文化研究科
江里口研 M2 / 藤井亮治

2010 年 8 月 5 日（木） ＠夏の学校（ 豊橋 ）

目次

- Introduction
- 先行研究 (一般相対論)
- 先行研究 (Newton 重力)
- 定式化
- まとめ
- 今後の課題

Introduction

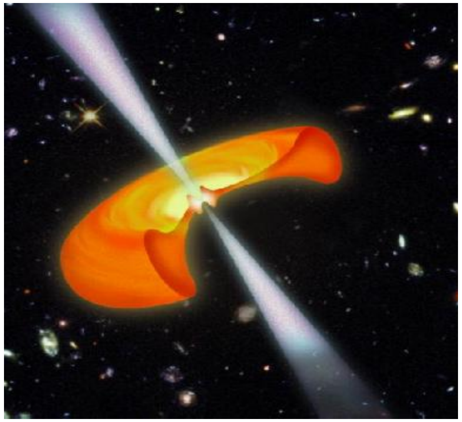
Introduction（本研究の目的）

目的 ： 天体の平衡状態を self-consistent に求める

- 天体の平衡状態とは･･･
  - 全ての力（圧力、遠心力、自己重力 etc. ）
    が釣り合った天体の形状、状態の事
- self-consistent な解とは･･･
  - 解くべき全ての方程式の間に、矛盾が無いような解
- 対象とする天体･･･
  - ブラックホール（ BH ）/ 中性子星（ NS ） + 円盤
  - 同時に磁場も考慮

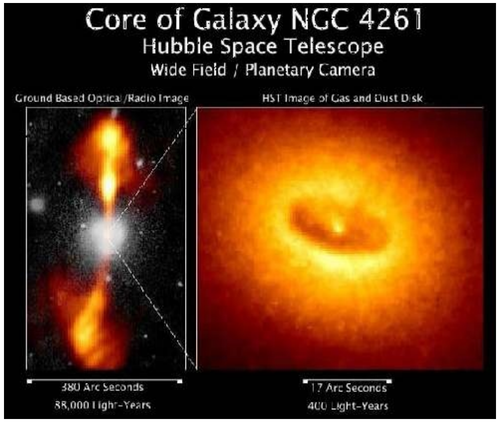
Introduction（注目されている天文現象）

・ガンマ線バースト



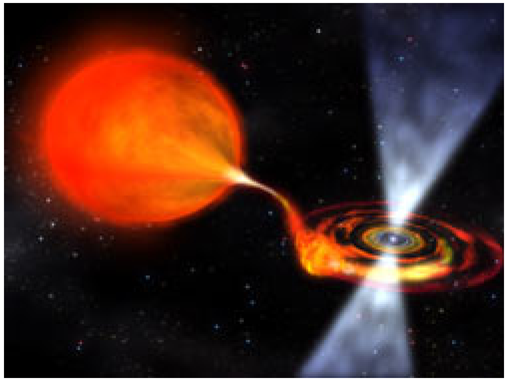
ガンマ線バーストの源はブラックホール＋大質量降着円盤であると予想されている。

・AGN（活動銀河核）



中心に巨大なブラックホールがあり、BH が活動銀河中心核（AGN）の活動性の起源だと考えられている。

・降着円盤からの X 線放射

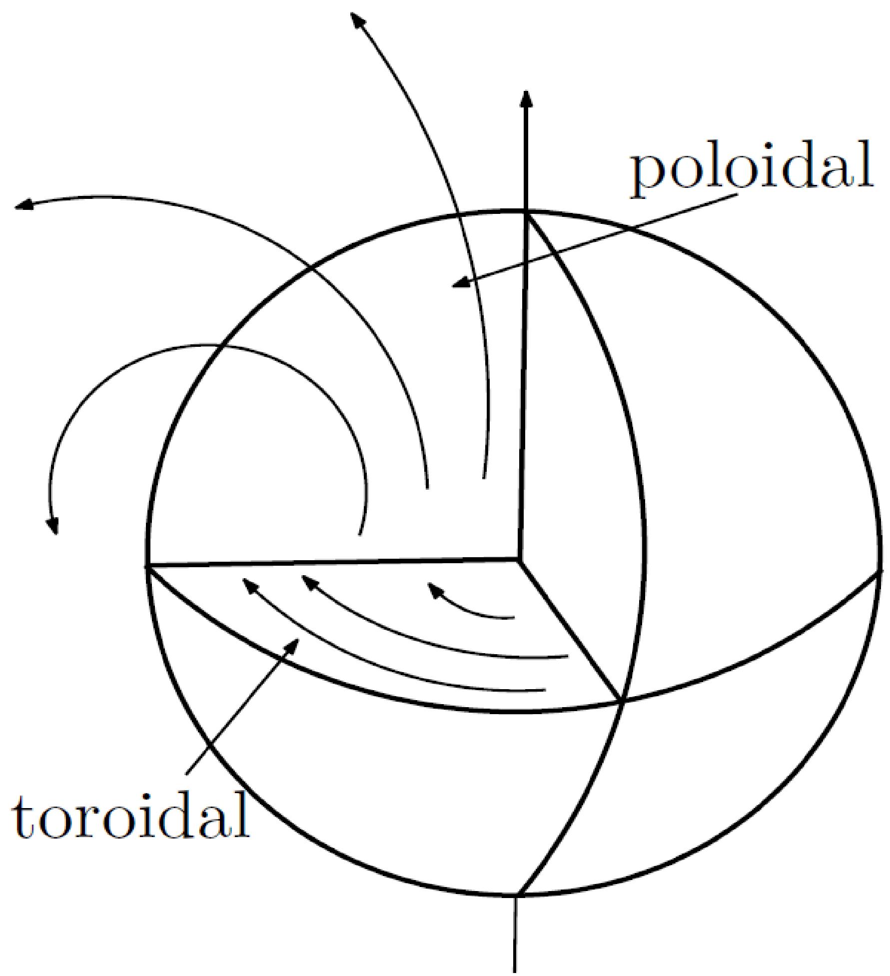


コンパクト天体近傍の降着円盤は数百万〜数千万 K にまで加熱され、X 線が放射されることが観測的に確認されている。

etc.

Introduction（磁場の成分について）

- poloidal / toroidal 磁場とは…



天体の平衡状態に関する
先行研究

先行研究 (一般相対論)

- 星 + 円盤
  - A.Lanza (1992) : BH + thin disk
  - Nishida et al. (1992) : polytrope 星 + toroid
  - Nishida et al. (1994) : BH + toroid
  - M.shibata (2007) : BH + toroid etc.
- 星 + 磁場
  - Bocquet et al. (1995) : NS + poloidal 磁場
  - Ioka & Sasaki (2004) : NS + poloidal & toroidal 磁場
    （磁場は摂動として扱われている）
  - Kiuchi & Yoshida (2008) : NS + toroidal 磁場 etc.

→ 一般相対論では星 + 円盤 + 磁場の3つを同時に考慮した self-consistent な平衡状態を求める研究は皆無。

先行研究(Newton 重力)

- Otani, Takahashi & Eriguchi (2009)

(1) 概要

- 星 / 円盤 / 磁場の 3 つを含む系の self-consistent な 平衡状態を Newton 重力の下で計算。
- 磁場は poloidal / toroidal 両方を考慮。

(2) 仮定

- 定常・軸対称 : $\partial/\partial t = \partial/\partial \varphi = 0$
- 赤道面対称
- 中心天体は質点
- 子午面内の流れ無し : $u_r = u_\theta = 0$
- Ideal MHD: $\boldsymbol{E} + \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} = 0$
- polytrope: $p(\rho) = K\rho^{1+1/n}$

先行研究(Newton)

(3) 解くべき方程式

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{GM_{\mathrm{c}}}{r} - \Phi_{\mathrm{g}} + \frac{1}{2}R^2\Omega^2 + \int \mu(u)\,\mathrm{d}u + C, & \text{: 運動方程式(積分系)} \\
\displaystyle\Phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', & \text{: 重力ポテンシャル} \\
\displaystyle A_\phi(\boldsymbol{r})\sin\phi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\sin\phi'\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'. & \text{: ベクトルポテンシャル} \\
\displaystyle \left(S(\boldsymbol{r}) \equiv -\frac{\kappa(u)}{R}\int^u \kappa(u)\,\mathrm{d}u - 4\pi\mu\rho R - 2\pi\rho R^3\frac{\mathrm{d}\Omega^2}{\mathrm{d}u}. \right) & \\
\displaystyle \boldsymbol{j} = \frac{\kappa(u)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \left[\mu(u)\rho R + \frac{1}{2}\rho R^3\frac{\mathrm{d}\Omega^2(u)}{\mathrm{d}u}\right]\boldsymbol{e}_\phi, & \text{: 電流密度}
\end{cases}
$$

(ただし $u = RA_\varphi$)

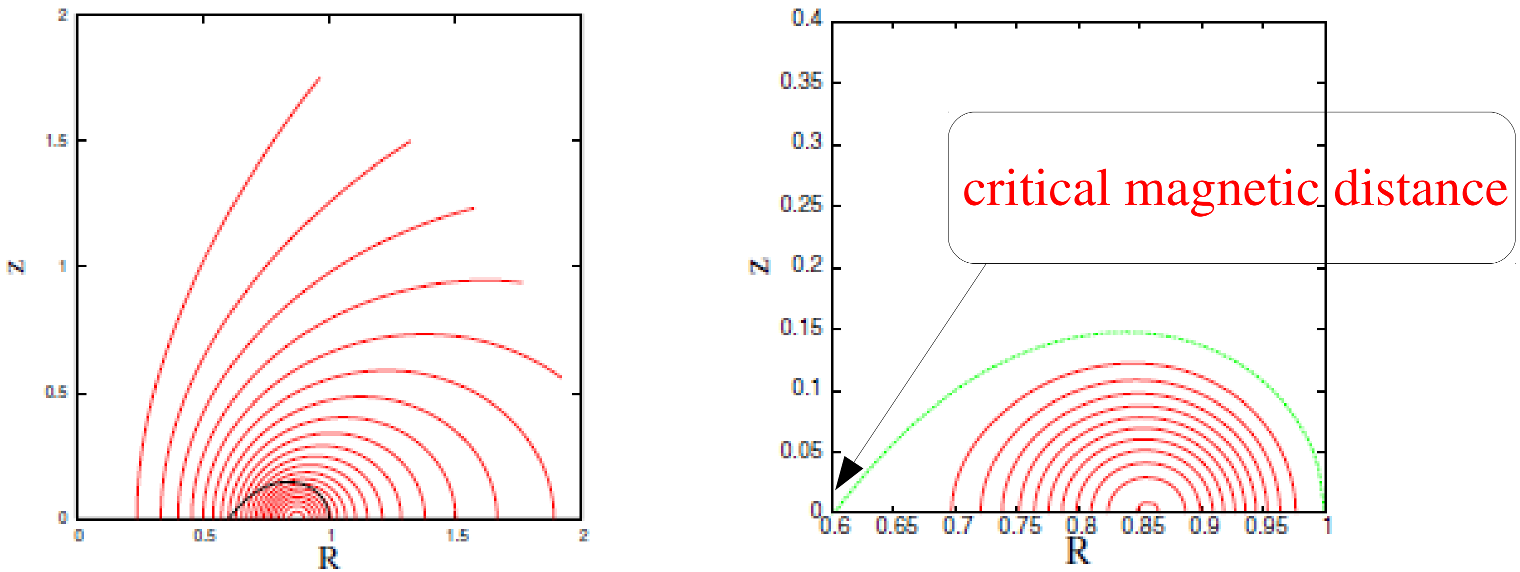
κ 、μ 、Ω は任意関数で

$$
\begin{cases}
\mu = \text{constant} = \mu_0, \\
\kappa = \begin{cases} 0, & \text{for} \quad u \le u_{\max}, \\ a\,(u - u_{\max})^k, & \text{for} \quad u \ge u_{\max}, \end{cases} \\
\Omega = \Omega_0(u^2 + d^2)^\alpha,
\end{cases}
$$

としている。

先行研究(Newton)

(4) 得られた平衡状態



左） poloidal 磁場の磁力線（赤）, 円盤の表面（黒）

右） 等密度線（赤）, 円盤の表面（緑）

(5) 示唆された事

「磁場の影響により、円盤の内縁がある半径以内には近づけなくなる」

→その半径を "magnetic critical distance" と呼ぶ。
→一般相対論に拡張したとき、どれだけ中心から離れるのかを検証。

一般相対論における定式化

定式化

※ 以下で用いる座標系･単位系･表記について

- 座標系 ： 極座標 (t, r, θ, φ)
- 単位系 ： 幾何学単位系（ $c = G = 1$ ）
- 表記 ：

ρ : 質量密度

ε : エネルギー密度

p : 圧力

$g_{\mu\nu}$: metric

A_μ : ベクトルポテンシャル

$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu A_\nu$: 電磁場テンソル

u^μ : 4 元速度

etc.

定式化

(1) 仮定

- 定常軸対称: $\partial/\partial t = \partial/\partial\varphi = 0$
- 子午面内の流れ無し: $u^r = u^\theta = 0$
- ideal MHD：$F_{\mu\nu}u^\nu = 0$
- polytrope：$p(\epsilon) = K\epsilon^{1+1/n}$
- 中心天体は NS / BH

(2) 基礎方程式

■ 線素: $$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\alpha}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{2\beta}r^2\sin^2\theta(d\varphi - \omega dt)^2$$

■ 4元速度: $$u^\mu = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}}(1,0,0,\Omega)$$

■Euler 方程式: $$\frac{1}{\epsilon+p}\frac{\partial p}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\log u^\mu - C_\mu - D_\mu = 0$$

$$C_\mu \equiv S\frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu} \qquad S \equiv \frac{(\Omega-\omega)e^{2(\beta-\nu)}r^2\sin^2\theta}{(\Omega-\omega)^2e^{2(\beta-\nu)}r^2\sin^2\theta - 1} \qquad \Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t}$$

$$D_\mu \equiv -\frac{1}{\epsilon+p}F_{\mu\nu}j^\nu \qquad v \equiv e^{\beta-\nu}(\Omega-\omega)r\sin\theta$$

$$B^\mu \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu F_{\alpha\beta} \qquad j^\mu = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})$$

定式化

■Einstein 方程式:

重力場を記述する非線形偏微分方程式。

これを解くことで metric $\rho, \gamma, \omega, \alpha$ が求まる。

→ そのうちの３本は解きやすいよう Poisson 方程式（に近い）形に変形する。

ここで

$$\mu = \cos\theta$$
$$\gamma = \nu + \beta$$
$$\rho = \nu - \beta$$

$$\begin{cases} \nabla^2[\rho e^{\gamma/2}] = S_\rho(r,\mu) \\ \left(\nabla^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{\mu}{r^2}\right)[\gamma e^{\gamma/2}] = S_\gamma(r,\mu) \\ \left(\nabla^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{2\mu}{r^2}\partial_\mu\right)[\omega e^{(\gamma-2\rho)/2}] = S_\omega(r,\mu) \end{cases}$$

定式化

■Einstein 方程式:

ただし…

- $$S_\rho(r,\mu) = e^{\gamma/2}\left\{8\pi e^{2\alpha}(\epsilon+p)\frac{1+v^2}{1-v^2} + \frac{2(1+v^2)}{e^{2\beta}r^2(1-\mu^2)}\left({A_\varphi}_{,r}^{\;2} + \frac{{A_\varphi}_{,\mu}^{\;2}}{r^2}\right)\right.$$
$$+ r^2(1-\mu^2)e^{-2\rho}\left(\omega_{,r}^2 + \frac{1-\mu^2}{r^2}\omega_{,\mu}^2\right) + \frac{1}{r}\gamma_{,r} - \frac{\mu}{r^2}\gamma_{,\mu}$$
$$\left.+ \frac{\rho}{2}\left[16\pi e^{2\alpha}p - \gamma_{,r}\left(\frac{\gamma_{,r}}{2}+\frac{1}{r}\right) - \frac{\gamma_{,\mu}}{r^2}\left(\frac{1-\mu^2}{2}\gamma_{,\mu} - \mu\right)\right]\right\}$$
- $$S_\gamma(r,\mu) = e^{\gamma/2}\left\{16\pi e^{2\alpha}p + \frac{\gamma}{2}\left[16\pi e^{2\alpha}p - \frac{1}{2}\gamma_{,r}^2 - \frac{1-\mu^2}{2r^2}\gamma_{,\mu}^2\right]\right\}$$
- $$S_\omega(r,\mu) = e^{(\gamma-2\rho)/2}\left\{-16\pi e^{2\alpha}\frac{(\Omega-\omega)(\epsilon+p)}{1-v^2} - \frac{4(\Omega-\omega)}{e^{2\beta}r^2(1-\mu^2)}\left({A_\varphi}_{,r}^{\;2} + \frac{{A_\varphi}_{,\mu}^{\;2}}{r^2}\right)\right.$$
$$+ \omega\left[-8\pi e^{2\alpha}\frac{(1+v^2)\epsilon + 2v^2p}{1-v^2} - \frac{2(1+v^2)}{e^{2\beta}r^2(1-\mu^2)}\left({A_\varphi}_{,r}^{\;2} + \frac{{A_\varphi}_{,\mu}^{\;2}}{r^2}\right)\right.$$
$$- \frac{1}{r}\left(2\rho_{,r} + \frac{\gamma_{,r}}{2}\right) + \frac{\mu}{r^2}\left(2\rho_{,\mu} + \frac{\gamma_{,\mu}}{2}\right) + \frac{1}{4}(4{\rho_{,r}}^2 - {\gamma_{,r}}^2) + \frac{1-\mu^2}{4r^2}(4{\rho_{,\mu}}^2 - {\gamma_{,\mu}}^2)$$
$$\left.\left.- r^2(1-\mu^2)e^{-2\rho}\left(\omega_{,r}^2 + \frac{1-\mu^2}{r^2}\omega_{,\mu}^2\right)\right]\right\}$$

定式化

■Einstein 方程式:

α に対する微分方程式

$$
\begin{aligned}
\alpha_{,\mu} = & -\nu_{,\mu} - \left\{(1-\mu^2)\left(1+\frac{r\xi_{,r}}{\xi}\right)^2 + \left[\mu - \frac{(1-\mu)^2\xi_{,\mu}}{\xi}\right]^2\right\}^{-1} \\
& \times \Bigg[\frac{1}{2\xi}\left\{r^2\xi_{,rr} - [(1-\mu^2)\xi_{,\mu}]_{,\mu} - 2\mu\xi_{,\mu}\right\}\left[-\mu + \frac{(1-\mu^2)\xi_{,\mu}}{\xi}\right] \\
& + \frac{r\xi_{,r}}{\xi}\left[\frac{\mu}{2} + \frac{r\mu\xi_{,r}}{\xi} + \frac{(1-\mu^2)\xi_{,\mu}}{2\xi}\right] + \frac{3\xi_{,\mu}}{2\xi}\left[-\mu^2 + \frac{\mu(1-\mu^2)\xi_{,\mu}}{\xi}\right] \\
& - \frac{r(1-\mu^2)\xi_{,r\mu}}{\xi}\left(1+\frac{r\xi_{,r}}{\xi}\right) - r^2\mu\nu_{,r}^2 - 2r(1-\mu^2)\nu_{,r}\nu_{,\mu} + \mu(1-\mu^2)\nu_{,\mu}^2 \\
& - \frac{2r^2(1-\mu^2)\xi_{,r}\nu_{,r}\nu_{,\mu}}{\xi} + \frac{(1-\mu^2)\xi_{,\mu}}{\xi}\left[r^2\nu_{,r}^2 - (1-\mu^2)\nu_{,\mu}^2\right] \\
& + (1-\mu^2)\xi^2 e^{-4\nu}\Bigg\{\frac{1}{4}r^4\mu\omega_{,r}^2 + \frac{1}{2}r^3(1-\mu^2)\omega_{,r}\omega_{,\mu} - \frac{1}{4}r^2\mu(1-\mu^2)\omega_{,\mu}^2 \\
& + \frac{r^4(1-\mu^2)\xi_{,r}\omega_{,r}\omega_{,\mu}}{2\xi} - \frac{r^2(1-\mu^2)\xi_{,\mu}}{4\xi}\left[r^2\omega_{,r}^2 - (1-\mu^2)\omega_{,\mu}^2\right]\Bigg\} \\
& - \frac{1-v^2}{e^{2\beta}r^2\sqrt{1-\mu^2}}\Bigg[r^2\left(\frac{(1-\mu^2)\xi_{,\mu}}{\xi} - \mu\right)\left\{{A_\varphi}_{,r}^{2} - \frac{(1-\mu^2){A_\varphi}_{,\mu}^{2}}{r^2}\right\} \\
& \qquad - 2r(1-\mu^2)\left(\frac{r\xi_r}{\xi} + 1\right)A_{\varphi,r}A_{\varphi,\mu}\Bigg]\Bigg]
\end{aligned}
$$

ただし

$\xi = e^\gamma$

定式化

■ 一般化されたG-S（Grad-Shafranov）方程式

$$\Delta^{(3)}(\chi \sin\varphi) = S_\chi \sin\varphi$$

３次元
Laplacian

ただし

$$\begin{cases} \chi \equiv A_\varphi / r\sin\theta \\ S_\chi = -\dfrac{4\pi(\epsilon+p)}{1-v^2} r\sin\theta(S\Omega' - a) \\ \quad -\dfrac{1}{r}\partial_r(\chi r)\partial_r\left[\log\left\{e^{\nu-\beta}(1-v^2)\right\}\right] \\ \quad -\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\chi\sin\theta)\partial_\theta\left[\log\left\{e^{\nu-\beta}(1-v^2)\right\}\right] \\ \quad -\dfrac{(\Omega-\omega)\omega'}{1-v^2} r\sin^3\theta e^{2(\beta-\nu)}\left\{\partial_r(\chi r)\right\}^2 \\ \quad -\dfrac{(\Omega-\omega)\omega'}{1-v^2} r^3\sin\theta e^{2(\beta-\nu)}\left\{\dfrac{1}{r}\partial_\theta(\chi\sin\theta)\right\}^2 \end{cases}$$

定式化

(3)Euler 方程式の t , ϕ 成分

- Euler 方程式の t , ϕ 成分を計算する事で

$$\Rightarrow \begin{cases} A_t = \text{const.} \\ \sqrt{-g}F^{r\theta} = \text{const.} \\ \sqrt{-g}F^{r\theta} = f_1(A_t) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_\varphi = \text{const.} \\ \sqrt{-g}F^{r\theta} = \text{const.} \\ \sqrt{-g}F^{r\theta} = f(A_\varphi) \end{cases}$$

---

(4) 磁場の各成分

- 磁場の各成分は具体的には

$$\begin{cases} B^t = \dfrac{1}{\sqrt{-g}} u_\varphi F_{r\theta} & B^r = -\dfrac{1}{\sqrt{-g}} \left(u_t \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \dfrac{\partial A_t}{\partial \theta} \right) \\ B^\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{-g}} u_t F_{r\theta} & B^\theta = \dfrac{1}{\sqrt{-g}} \left(u_t \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r} - u_\varphi \dfrac{\partial A_t}{\partial r} \right) \end{cases}$$

定式化

ここから、次の 3 通りの場合を考えることが出来る。

(i) $A_t = \mathrm{const.}\ ,\ A_\varphi = \mathrm{const.}\ ,\ F^{r\theta} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} B^t \neq 0 & B^r = 0 \\ B^\varphi \neq 0 & B^\theta = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

toroidal 磁場のみが存在

(ii) $A_t \neq \mathrm{const.}\ ,\ A_\varphi \neq \mathrm{const.}\ ,\ F^{r\theta} = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} B^t = 0 & B^r \neq 0 \\ B^\varphi = 0 & B^\theta \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

poloidal 磁場のみが存在

(iii) $A_t \neq \mathrm{const.}\ ,\ A_\varphi \neq \mathrm{const.}\ ,\ F^{r\theta} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} B^t \neq 0 & B^r \neq 0 \\ B^\varphi \neq 0 & B^\theta \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

toroidal / poloidal 磁場が混在

定式化

※ 磁場はどの成分を入れるか・・・

poloidal / toroidal 両方の磁場は星の安定化に

効くとも言われ、両方同時に考慮するべきなのだが ...

- Wright (1973)
- Markey & Tayler (1974)
- Braithwaite & Spruit (2004)　　etc...

→ 相対論で poloidal / toroidal 両方の磁場を同時に

扱おうとすると(metric を全成分考える必要があり)

重力場の扱いが非常に複雑になる。

→ 簡単の為、今回は poloidal 磁場のみを考慮。

$\Downarrow$

$A_t \neq \text{const.}\ ,\ A_\varphi \neq \text{const.}\ ,\ F^{r\theta} = 0$ を採用

定式化

(5) 2つの任意関数

■任意関数 $\Omega(A_\varphi)$

・ideal MHD の条件に対する積分可能条件

・ $A_t \neq \mathrm{const.}$, $A_\varphi \neq \mathrm{const.}$

$$\left.\right\} \Rightarrow \Omega = \Omega(A_\varphi)$$

■任意関数 $a(A_\varphi)$

– 運動方程式に対する積分可能条件 $\Rightarrow S\Omega' - \dfrac{j^\varphi - \Omega j^t}{\epsilon + p} \equiv a(A_\varphi)$

---

(6) 境界条件

■無限遠　時空:無限遠で漸近的→ $\begin{array}{ll} \rho \sim O(1/r) & \gamma \sim O(1/r) \\ \omega \sim O(1/r^3) & \alpha \sim O(1/r) \end{array}$

磁場:無限遠で0 → $\chi \sim O(1/r)$

■ event horizon 上（BH の場合）

時空: $e^\gamma = 0$　$e^\rho = 0$　$\omega = \omega_h = \mathrm{const.}$　/　磁場:定説無し

（Nishida et al. (1994)）

数値計算スキーム

- KEH（Komatsu, Eriguchi & Hachisu(1989)）を改良する。

■KEH のエッセンス

(1) 密度 ε / metric $\nu, \beta, \omega, \alpha$ / 角速度 Ω の initial guess

↓

(2)（ν, β, ω に対する）Einstein 方程式に代入。

↓

(3) 新しい ν, β, ω が求まる。

↓

(4)（α に対する）Einstein 方程式に代入。

↓

(5) 新しい α が求まる。

↓

(6) 新しく得た $\nu, \beta, \omega, \alpha$ を用いて新しい ε, Ω を求める。

収束するまでこのサイクルを繰り返す

※これに加え G-S 方程式をも self – consistent に解く為の数値計算コードを現在開発中。

定式化まとめ

● 目的
中心天体＋円盤＋磁場の系の平衡状態を求める。

● 仮定
- 定常軸対称
- 子午面内部の流れなし
- ideal MHD
- polytrope

● 解くべき方程式
- Euler 方程式
- Einstein 方程式
（ $\nu, \beta, \omega, \alpha$ に関する微分方程式）
- G-S 方程式

● 任意関数は2つ
- $\Omega(A_\varphi)$ と $a(A_\varphi)$
- 物理的に適切で、解が上手く収束するようなものを選ぶ。

● 数値計算法
- KEH を改良したものを開発中。
- 全ての方程式を self-consistent に解く。

今後の課題

ご清聴ありがとうございました。