

第40回 夏の学校

MHD Riemann problem における compound wave の研究

早稲田大学 山田章一研究室 M1 高橋和也

k.takahashi@heap.phys.waseda.ac.jp

OUTLINE

1. 天体現象と磁場

磁場が重要な役割を果たしている天体現象は数多くある

2. 磁気流体(MHD)方程式の未解決問題

現象を記述する方程式が抱える未解決問題

Riemann problem と compound wave

3. 研究結果と今後の課題

宇宙の高エネルギー現象・・・

超新星残骸，太陽フレア，降着円盤，ジェットなど

高温プラズマ＋磁場

太陽フレア：

磁場のエネルギーを短時間で解放する爆発現象。
このとき大量の高エネルギー粒子，高速プラズマ雲，
ジェットなどが惑星間空間に放出される

かに星雲，かにパルサーなどの超新星残骸，パルサー

ブラックホールや原始星の降着円盤やジェット

などなど・・・

宇宙の高エネルギー現象の解明には，
物質が磁場中でどう振舞うかを知ることが不可欠

磁場中での物質の振舞いを記述する方程式...

磁気流体(MHD)方程式

粘性, 熱伝導を無視, 電気伝導度→無限大の近似:

理想MHD方程式

多くの研究に利用されているMHD方程式だが,
じつは数学的な未解決問題を含んでいる...

理想MHD方程式が抱える未解決問題に
アカデミックな興味から取りくんだ

どのような問題か？（おおまかな枠組み）

1. 理想MHD方程式：双曲型方程式 という種類に分類される

2. ある種の 双曲型方程式に関する一般理論（Lax の定理）

P.D. Lax (1957)

Riemann problem で現れる波に関する定理

3. Brio & Wu の理想MHDの数値シミュレーション

M. Brio & C.C. Wu (1988)

→ Lax の定理に反するような結果が得られた

具体的には次のような問題です →NEXT

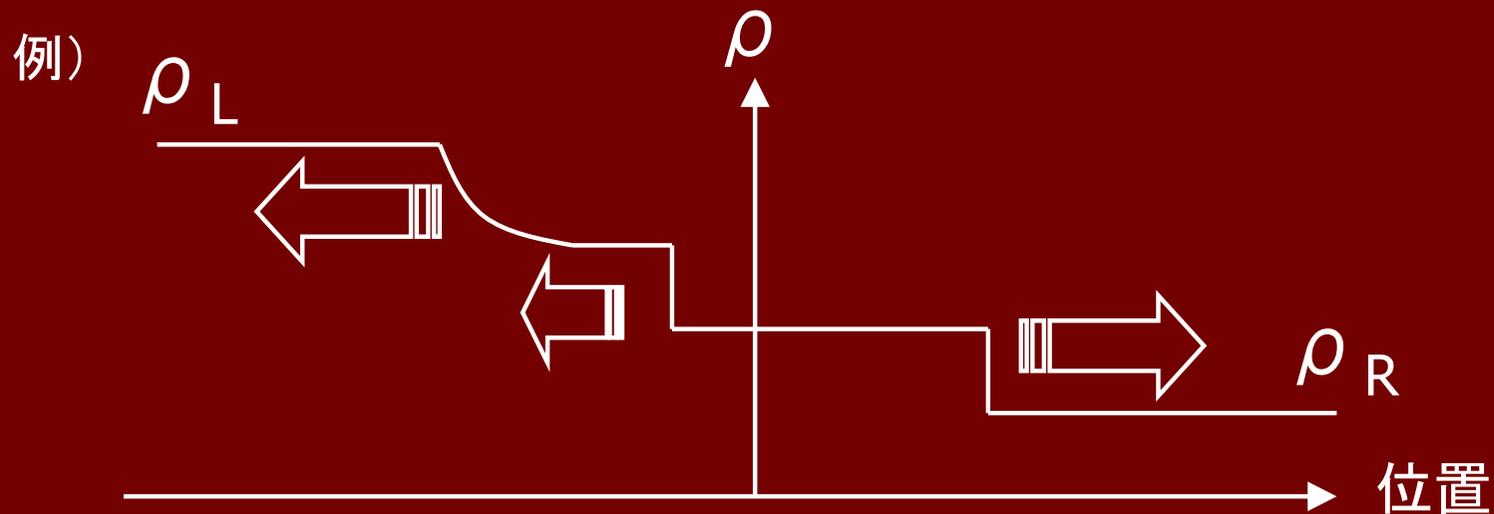
Riemann problem とは

仕切り
↓

$$\rho_L, \mathbf{v}_L, p_L, (\mathbf{H}_L)$$

$$\rho_R, \mathbf{v}_R, p_R, (\mathbf{H}_R)$$

- ・左右に密度や圧力の異なった2種類の圧縮性流体をいれる
- ・仕切りがなくなったときに、どういう波が現れるかという問題
(膨張波, 接触不連続面, 衝撃波など)



MHD数値シミュレーションのコードは
Riemann problem から得られる結果を利用している

Lax の定理 : (ある種の双曲型方程式系の一般理論)

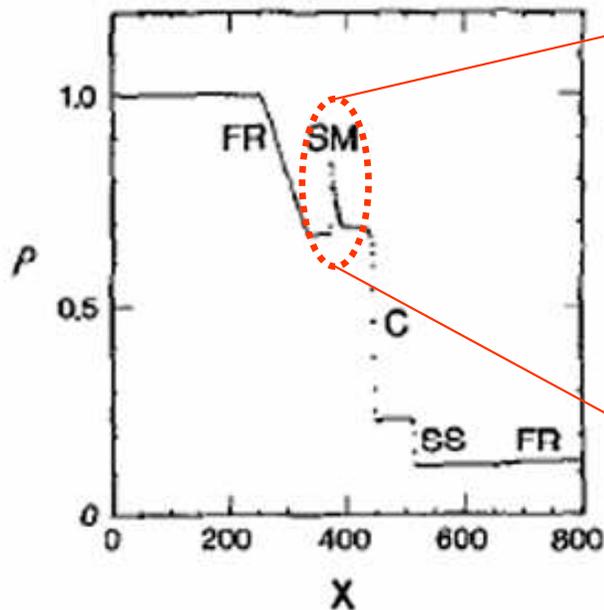
Riemann problem の解は 速度の異なった波で一意に構成できる

Brio & Wu の数値シミュレーション: 予想外の結果!

ある初期条件の下で
Riemann problemを解いた



Slow rarefaction wave と
Shockがくっついた
compound wave



Shock Rarefaction

Laxの定理

compound waveは
出ない

一見矛盾

Brio & Wuの 理想MHD数値計算

compound waveが出た

定理の適用条件

1. 双曲型方程式の性質に対する条件
2. 最初に左右にどんな状態を用意するか。
初期条件に対する条件

適用条件を満たしていない？

1. 理想MHD方程式は本当に性質のよい双曲型方程式？
2. 与えた初期条件は適当か？

本研究では、Laxの定理は正しいという立場。
Brio & Wu の数値計算には定理が適用できないと考え、
これを検証した

MHD基礎方程式 (Lundquist eqs.)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + B(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad H_x = \text{const.}$$

$$\mathbf{V} = {}^T (\rho, v_x, v_y, H_y, v_z, H_z, S)$$

$$B = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & v_x & 0 & \frac{\mu}{4\pi\rho} H_y & 0 & \frac{\mu}{4\pi\rho} H_z & \frac{pS}{\rho} \\ 0 & 0 & v_x & -\frac{\mu}{4\pi\rho} H_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_y & -H_x & v_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_x & -\frac{\mu}{4\pi\rho} H_x & 0 \\ 0 & H_z & 0 & 0 & -H_x & v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix}$$

ρ : 密度 v_j : 速度 H_j : 磁場 S : エントロピー μ : 透磁率 a : 音速

Laxの定理 (P.D.Lax, 1957)

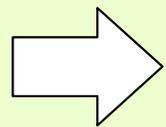
Laxの定理が適用できる条件

1. 保存系 $U_t + F_x(U) = U_t + A(U)U_x = 0$

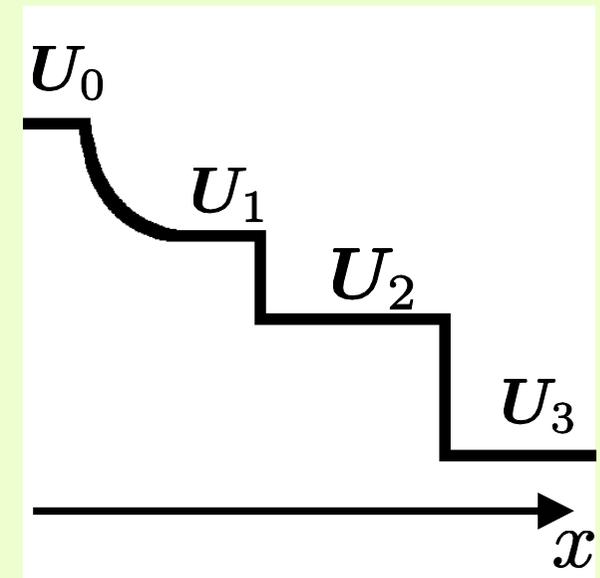
$A(U_0)$ の **固有ベクターが線形独立**

2. 初期に与える U_0, U_n の **Jump が小さい**

1, 2を両方満たすことで適用できる



Riemann Problemの解は、
異なった速度の波で
一意的に構成できる



研究手法

Ideal MHD基礎方程式 (Lundquist eqs.)

- ⇒ 行列の固有値を求める
- ⇒ 各固有値に属する固有ベクターを求める
- ⇒ 固有ベクターの線形独立性を検証する

固有値: $\lambda = v_x, v_x \pm b_x, v_x \pm c_f, v_x \pm c_s$ 7個

Entropy
wave

Alfvén
wave

Fast
wave

Slow
wave

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_x^2}) \right\}^{1/2} \quad \text{fast speed}$$
$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_x^2}) \right\}^{1/2} \quad \text{slow speed}$$

$$b_i = \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho} H_i} \quad \text{Alfvén speed}$$

$$b^2 \equiv b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$$

a : 音速

固有ベクター (1/2)

$$\mathbf{r}_f^\pm = \sqrt{\frac{a^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}} \begin{pmatrix} \rho \\ \pm c_f \\ \mp \frac{c_f}{c_f^2 - b_x^2} \frac{\mu}{4\pi\rho} H_x H_y \\ \frac{c_f^2}{c_f^2 - b_x^2} H_y \\ \mp \frac{c_f}{c_f^2 - b_x^2} \frac{\mu}{4\pi\rho} H_x H_z \\ \frac{c_f^2}{c_f^2 - b_x^2} H_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fast wave

2個

$$\mathbf{r}_s^\pm = \sqrt{\frac{c_f^2 - a^2}{c_f^2 - c_s^2}} \begin{pmatrix} \rho \\ \pm c_s \\ \mp \frac{c_s}{c_s^2 - b_x^2} \frac{\mu}{4\pi\rho} H_x H_y \\ \frac{c_s^2}{c_s^2 - b_x^2} H_y \\ \mp \frac{c_s}{c_s^2 - b_x^2} \frac{\mu}{4\pi\rho} H_x H_z \\ \frac{c_s^2}{c_s^2 - b_x^2} H_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Slow wave

2個

固有ベクター (2/2)

$$\mathbf{r}_a^\pm = \frac{a}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm \operatorname{sgn}(H_x) \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}} H_z \\ -H_z \\ \mp \operatorname{sgn}(H_x) \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}} H_y \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alfvén wave
2個

$$\mathbf{r}_e = \begin{pmatrix} pS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

Entropy wave
1個

結果

固有値: $\lambda = v_x, v_x \pm b_x, v_x \pm c_f, v_x \pm c_s$

固有値が縮退しない場合,
固有ベクターの線形独立性は明らか。

固有値が縮退する場合:

$$H_x = 0 : c_f = \sqrt{a^2 + b^2}, c_s = b_x = 0$$

$$H_x \neq 0, H_y = H_z = 0 : c_f = \max(a, b_x), c_s = \min(a, b_x)$$

が問題になるが,

いずれの場合も固有ベクターは線形独立であった

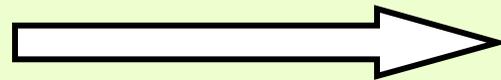
結論

Ideal MHD方程式の固有ベクトルは線形独立

Laxの定理

Brio & Wu

定理の適用条件



適用条件を満たしていない？

Laxの定理が適用できる条件

1. $U_t + F_x(U) = U_t + A(U)U_x = 0$

$A(U_0)$ の

固有ベクトルが線形独立

2. 初期に与えるJumpが小さい

満たす

2. Brio & Wuの与えた
初期条件は
Jump が大きい？

研究結果

理想MHD方程式は Lax の定理を適用するための性質を持っていた



与えた初期条件が適当ではなかった？

初期に与える不連続が大きすぎると Lax の定理は適用できない

Brio & Wu の初期条件に少しずつ不連続量を近づけ、
どこで“おかしい”ことが起こるかを検証する
(数値計算)

参考文献

- 1) Jeffrey,A. & Taniuti,T 1964,NON-LINEAR WAVE PROPAGATION(NEWYORK:ACADEMIC PRESS INC.),ch.1-6
- 2) Lax,P.D. 1957,COMMUNICATION ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL.X, 537-566
- 3) Brio,M & Wu,C.C. 1988,JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 75,400-422